A 55-A OLIMPIADĂ NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ

Deva, 5 aprilie 2004

CLASA A X-A

Subiectul 1. Fie $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ astfel ca $|f(x) - f(y)| \leq |x - y|$, pentru orice x, y reali. Să se arate că dacă pentru orice x real şirul $x, f(x), f(f(x)), \ldots$ este progresie aritmetică, atunci există a real astfel încât $f(x) = x + a$, pentru orice x real.

Subiectul 2. Să se arate că un tetraedru în care muchiile opuse sunt congruente şi formează unghiuri de măsuri egale este regulat.

Subiectul 3. Fie $n > 2$ un număr natural şi $a \in (0, \infty)$ astfel încât

$$2^a + \log_2 a = n^2.$$

Să se demonstreze că

$$2 \log_2 n > a > 2 \log_2 n - \frac{1}{n}.$$

Subiectul 4. Fie $(P_n)_{n \geq 1}$ o familie infinită de plane şi $(X_n)_{n \geq 1}$ o familie de mulţimi nevide şi finite de puncte astfel încât $X_n \subset P_n$ şi proiecţia mulţimii X_{n+1} pe planul P_n este inclusă în mulţimea X_n, pentru orice n.

Să se arate că există un şir de puncte $(p_n)_{n \geq 1}$ astfel încât $p_n \in P_n$ şi p_n este proiecţia punctului p_{n+1} pe planul P_n, pentru orice n.

Rămâne afirmaţia adevărată dacă mulţimile X_n sunt infinite?